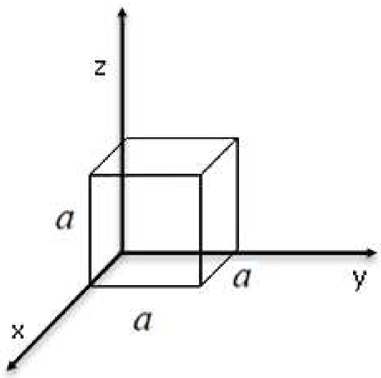
Problema 11 Guía 1:

11. Un cubo de lado a tiene sus aristas paralelas a los ejes cartesianos y uno de sus vértices se encuentra en el origen de coordenadas. Hallar el flujo del campo eléctrico a través de su superficie, la densidad de carga y la carga total encerrada si:

$$a)\ \vec{E} = E_0 \breve{x} \ ;\ b)\ \vec{E} = E_0 x\ \breve{x} \ ;\ c)\ \vec{E} = E_0\ x^2 \breve{x} \ ;\ d)\ \vec{E} = E_0 \left(y\,\breve{x} + x\,\breve{y} \right)$$

Definimos:



Cara 1: $x = a \quad \breve{n} = \breve{x}$

Cara 2: $x = 0 \quad \breve{n} = -\breve{x}$

Cara 3: $y = a \quad \breve{n} = \breve{y}$

Cara 4: $y = 0 \quad \breve{n} = -\breve{y}$

Cara 5: $z = a \quad \breve{n} = \breve{k}$

Cara 6: $z = 0 \quad \breve{n} = -\breve{k}$

Sabemos que: el flujo neto es la sumatoria de flujos a través de todas las caras del cubo.

Siendo:

$$\emptyset = \frac{q_{encerrada}}{\varepsilon_0}$$

$$\overline{\nabla}.\bar{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad siendo \quad \overline{\nabla}.\bar{E} = \frac{dE_x}{dx} + \frac{dE_y}{dy} + \frac{dE_z}{dz}$$

$$q_{encerrada} = \iiint \rho\ dV$$

Y sean:

$A = a.a = a^2$

$V = a^3$

Entonces:

a) $\bar{E} = E_o\breve{x}$

$$\emptyset = \bar{E}_{(x=a)}.\breve{n}_1 A + \bar{E}_{(x=0)}.\breve{n}_2 A = E_o\breve{x}.\breve{x}A + E_o\breve{x}.(-\breve{x})A = 0$$

Si $q_{encerrada} = \iiint \rho\ dV$ entonces $\rho = 0$

Si $\emptyset = \frac{q_{encerrada}}{\varepsilon_0}$ entonces: $q_{encerrada} = 0$

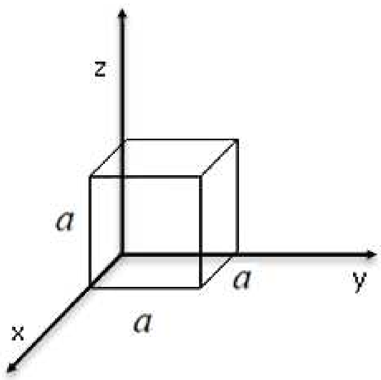
b) $\vec{E} = E_0 x\ \breve{x}$

$$\emptyset = \bar{E}_{(x=a)}.\breve{n}_1 A + \bar{E}_{(x=0)}.\breve{n}_2 A = E_o a\ \breve{x}.\breve{x}A + E_o\ 0\ \breve{x}.(-\breve{x})A = E_o aA = E_o a^3$$

$$\bar{\nabla}.\bar{E} = \frac{dE_0}{dx} = E_0$$

$$\rho = E_o \varepsilon_o$$

$$q_{encerrada} = E_o a^3 \varepsilon_o$$



c) $\vec{E} = E_0\ x^2 \breve{x}$

$$\emptyset = \bar{E}_{(x=a)}.\breve{n}_1 A + \bar{E}_{(x=0)}.\breve{n}_2 A = E_o a^2\ \breve{x}.\breve{x}A + E_o\ 0^2\ \breve{x}.(-\breve{x})A = E_o a^2 A = E_o a^4$$

$$\bar{\nabla}.\bar{E} = \frac{d(E_0\ x^2)}{dx} = E_0\ 2\ x = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\rho = E_0\ 2\ x\ \ \varepsilon_0$$

$$q_{encerrada} = \iiint \rho\ dV = 2\ \varepsilon_0\ E_0 \left(\int_0^a x\ dx \int_0^a dy \int_0^a dz \right) = 2\ E_0\ \frac{a^2}{2}\ a\ a = E_0\ a^4\ \varepsilon_0$$

d) $\bar{E} = E_0 \left(y\,\breve{x} + x\,\breve{y} \right)$

$$Cara\ 1{:}\ \bar{E}_{(x=a)}.\breve{x}\ A = E_o y\breve{x}.\breve{x}A + E_o a\breve{y}.\breve{x}A = E_o y a^2$$

$$Cara\ 2{:}\ \bar{E}_{(x=0)}.(-\breve{x})A = E_o y\breve{x}.(-\breve{x})A + E_o 0\breve{y}.(-\breve{x})A = -E_o y a^2$$

$$Cara\ 3{:}\ \bar{E}_{(y=a)}.(\breve{y})A = E_o a\breve{x}.\breve{y}A + E_o x\breve{y}.\breve{y}A = E_o x a^2$$

$$Cara\ 4{:}\ \bar{E}_{(y=0)}.(-\breve{y})A = E_o 0\breve{x}.(-\breve{y})A + E_o x\breve{y}.(-\breve{y})A = -E_o x a^2$$

Caras 5 y 6 no aportan.

Por lo tanto:

$$\emptyset_{total} = 0$$

$$q_{encerrada} = 0$$

$$\rho = 0$$